1. Base $\to 1$, exponente $\csc x \to \infty$: forma 1^∞.
2. $\ln y = \csc x \, \ln(x + \cos x) = \dfrac{\ln(x+\cos x)}{\operatorname{sen} x}$, de la forma $\frac{0}{0}$.
3. L'Hôpital:
$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\operatorname{sen} x}{(x+\cos x)\cos x} = 1.$$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} (x+\cos x)^{\csc x} = e^1 = e$.

Ejercicio 2B.6.2 ← volver

1. Forma $\infty - \infty$. Común denominador: $\dfrac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$, de la forma $\frac{0}{0}$.
2. L'Hôpital: $\dfrac{1 - e^x}{e^x - 1 + xe^x}$, otra vez $\frac{0}{0}$.
3. Otra vez: $\dfrac{-e^x}{2e^x + xe^x} \to \dfrac{-1}{2}$.
4. **El límite vale** $-\frac{1}{2}$.

Ejercicio 2B.6.3 ← volver

1. Forma $\infty \cdot 0$. Como cociente: $\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2x}\right)}{\frac{1}{4x}}$, de la forma $\frac{0}{0}$.
2. L'Hôpital: numerador $\cos\left(\frac{1}{2x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2x^2}\right)$; denominador $-\frac{1}{4x^2}$.
3. Cociente: $2\cos\left(\frac{1}{2x}\right) \to 2\cos 0$.
4. **El límite vale** 2.

Ejercicio 2B.6.4 ← volver

1. Base $\to 1$, exponente $\coth x \to \infty$: forma 1^∞.
2. $\ln y = \coth x \, \ln(1 - \operatorname{senh} x) = \dfrac{\ln(1-\operatorname{senh} x)}{\tanh x}$, de la forma $\frac{0}{0}$.
3. L'Hôpital:
$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\cosh x/(1-\operatorname{senh} x)}{\operatorname{sech}^2 x} = -1.$$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1-\operatorname{senh} x)^{\coth x} = e^{-1}$.

Ejercicio 2B.10.1 · L'Hôpital dos veces con la exponencial ← volver

1. Al sustituir: $\frac{1-1-0}{0} = \frac{0}{0}$.
2. L'Hôpital: $\dfrac{e^x - 1}{2x}$, otra vez $\frac{0}{0}$.
3. Otra vez: $\dfrac{e^x}{2} \to \dfrac{e^0}{2}$.
4. **El límite vale** $\frac{1}{2}$.

Ejercicio propuesto 4B.6.5

Adaptado de: 1er final 2017-2, tipo A, problema 1.

Obtenga la serie de Maclaurin de la función

$$g(x) = \frac{1}{2(x-1)^2}.$$

Resultado: $\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{2} + x + \frac{3}{2}x^2 + 2x^3 + \ldots$, para $|x| < 1$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 179.

4B.7 Errores frecuentes

- **Concluir convergencia porque $a_n \to 0$.** El término n-ésimo solo sirve para probar divergencia: $\frac{1}{n} \to 0$ y la armónica diverge.
- **Aplicar Leibniz sin revisar el límite.** Si b_n no tiende a cero, la serie diverge aunque alterne, como $\sum(-1)^{n+1}7^{-1/(n+1)}$.
- **Olvidar el análisis de los extremos.** El cociente da $L = 1$ en ellos y no decide; hay que sustituir cada extremo en la serie y estudiarla con otro criterio.
- **Sustituir el extremo mal.** Con $x = 0$ en $(-1)^n(x-4)^n$ queda $(-1)^n(-4)^n = 4^n$: los signos se cancelan. Escribe las potencias completas.
- **Equivocar el primer término de una geométrica.** En $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n+1}}$ el primer término es $\frac{4}{9}$; la suma es $\frac{a}{1-r} = \frac{4/9}{2/3} = \frac{2}{3}$, no $\frac{4}{1-1/3}$.
- **Perder el término constante o el índice.** En una serie de Maclaurin, el término $n = 0$ es $f(0)$; revisa que el índice inicial del término general reproduzca el primer término de la tabla.
- **Olvidar el $n!$ del denominador.** El coeficiente es $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$; sin el factorial, la serie de e^x se convierte en la de $\frac{1}{1-x}$.

4B.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Término n-ésimo: $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.
- Geométrica: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$; diverge si $|r| \geq 1$.
- Serie p: $\sum \frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p > 1$.
- Cociente: $L = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$; $L < 1$ converge, $L > 1$ diverge, $L = 1$ no decide.
- Comparación en el límite: $\lim \frac{a_n}{b_n} = c \in (0, \infty) \Rightarrow$ mismo carácter.
- Leibniz: $\sum(-1)^{n+1}b_n$ converge si b_n decrece y $b_n \to 0$.
- Taylor: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$; Maclaurin con $a = 0$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, en $(-1, 1)$.
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, en $\mathbb{R}$.

E.2A · Unidad 2 · Parte A · La derivada: reglas, implícita y paramétrica, tangentes y razón de cambio

Ejercicio 2A.6.1

← volver

1. Punto: $y = \cos^2\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$. Con abscisa positiva, $x = \frac{1}{2}$: $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.
2. Derivadas respecto a θ: $2x\frac{dx}{d\theta} = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ y $\frac{dy}{d\theta} = -2\cos\theta\operatorname{sen}\theta$.
3. Cociente: $\frac{dy}{dx} = \frac{-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta/x} = -2x$. (Lo mismo sale al eliminar el parámetro: $y = 1 - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - x^2$.)
4. En $x = \frac{1}{2}$: $m = -1$. Tangente: $y - \frac{3}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow 4x + 4y - 5 = 0$.
5. En el otro punto de ordenada $\frac{3}{4}$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, la pendiente es 1 y la tangente es $4x-4y+5 = 0$.

Se agregó «y abscisa positiva» al original.

Ejercicio 2A.6.2

← volver

1. Sea $P(a, a^2)$. La tangente tiene pendiente $m = 2a$; la recta, $m_2 = 3$.
2. $\tan 45^\circ = 1 = \left|\frac{3-2a}{1+6a}\right|$: dos casos.
3. $\frac{3-2a}{1+6a} = 1 \Rightarrow 3 - 2a = 1 + 6a \Rightarrow a = \frac{1}{4}$, con $m = \frac{1}{2}$.
4. $\frac{3-2a}{1+6a} = -1 \Rightarrow 3 - 2a = -1 - 6a \Rightarrow a = -1$, con $m = -2$.
5. Comprobación: con $m = -2$, $\frac{3-(-2)}{1-6} = -1$; con $m = \frac{1}{2}$, $\frac{3-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}} = 1$. En los dos el ángulo agudo es de 45°.
6. Puntos: $P(-1, 1)$ y $P\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$.

Ejercicio 2A.6.3

← volver

1. Variables: y (recorrido de A), x (de B), h (distancia entre ellos). Datos: $\frac{dy}{dt} = 3$, $\frac{dx}{dt} = 5$ (m/s).
2. Instante: $y = 9$ a los $t = 3$ s; entonces $x = 5(3) = 15$ y $h = \sqrt{81 + 225} = \sqrt{306} = 3\sqrt{34}$.
3. Ecuación: $h^2 = x^2 + y^2$. Derivando: $2h\frac{dh}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$.
4. Sustitución:
$$\frac{dh}{dt} = \frac{15(5) + 9(3)}{3\sqrt{34}} = \frac{102}{3\sqrt{34}} = \frac{34}{\sqrt{34}} = \sqrt{34}\ \text{m/s}.$$
5. Comprobación: $h = \sqrt{(3t)^2 + (5t)^2} = \sqrt{34}\,t$, que crece siempre a $\sqrt{34}$ m/s.

Ejercicio 2A.6.4

← volver

1. a) Se simplifica primero: $\ln e^y = y$. La ecuación es $e^{xy} - x = y$.
2. Derivación implícita: $e^{xy}(y + xy') - 1 = y'$.
3. Se agrupa: $(x\,e^{xy} - 1)\,y' = 1 - y\,e^{xy} \Rightarrow y' = \frac{1-y\,e^{xy}}{x\,e^{xy}-1}$.
4. b) $\frac{dx}{dt} = 9\cosh(3t)$ y $\frac{dy}{dt} = 6\operatorname{senh}(3t)$ (sin cambio de signo: $(\cosh u)' = \operatorname{senh} u\,u'$).
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{6\operatorname{senh}(3t)}{9\cosh(3t)} = \frac{2}{3}\tanh(3t)$.

Ejercicio 2A.6.5

← volver

3. **La serie converge.** (Su suma es aproximadamente 1.077, no $\frac{\pi}{4}$.) También se decide por comparación con $\sum \frac{1}{n^2}$.

4B.10.2 Visualización y uso de las series

Sumas parciales. El programa pide ver con software la convergencia y la divergencia: se calculan las sumas parciales S_N y se grafican contra N. Para $\sum \frac{1}{n^2}$, $S_{10} \approx 1.550$, $S_{100} \approx 1.635$ y $S_{1000} \approx 1.644$: se estabilizan cerca de $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$. Para la armónica $\sum \frac{1}{n}$, $S_{10} \approx 2.93$, $S_{100} \approx 5.19$ y $S_{1000} \approx 7.49$: crecen sin límite, aunque despacio (más o menos como $\ln N$). Una gráfica que «parece» estabilizarse no prueba la convergencia: la decide un criterio.

Error al cortar una serie alternada. Si una serie alternada cumple el criterio de Leibniz, el error al cortarla en un término es menor que el valor absoluto del primer término que se omite.

Uso en ingeniería. Cortar una serie de Taylor da un polinomio que aproxima la función cerca del centro. Así calculan una calculadora y una computadora $\operatorname{sen} x$, e^x o $\ln x$, y así se simplifican modelos: para ángulos pequeños, $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ convierte la ecuación del péndulo en una que se resuelve a mano; $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ y $e^x \approx 1 + x$ linealizan una función cerca de 0 (es la diferencial de la Parte 2A).

Ejercicio propuesto 4B.10.1 · Una serie con logaritmo

Determine el carácter de $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Resultado: Diverge.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 179.

Ejercicio propuesto 4B.10.2 · Una serie con exponencial

Determine el carácter de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,e^{-n^2}$ con el criterio de la integral.

Resultado: Converge (la integral vale $\frac{1}{2e}$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 179.

Ejercicio propuesto 4B.10.3 · El error de la aproximación del péndulo

Con la serie de Maclaurin de $\operatorname{sen} x$, acote el error de la aproximación $\operatorname{sen} x \approx x$ para $x = 0.1$.

Resultado: El error es menor que $\frac{0.1^3}{6} \approx 1.67 \times 10^{-4}$ (el error verdadero es 1.666×10^{-4}).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 179.

Con la computadora

```
# Sumas parciales de 1/n^2 y su suma; serie de ln(1 + x)
from sympy import Rational, log, oo, pi, series, summation
from sympy import symbols
n = symbols("n", integer=True, positive=True)
```

3. b) Forma $\frac{0}{0}$. Con $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$:

$$\frac{x^2}{\operatorname{sen} x \tan x} = \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 \cos x \to 1 \cdot 1 = 1.$$

4. Resultado: a) -3; b) 1.

Ejercicio 1B.6.4 ← volver

1. a) Forma $\frac{0}{0}$. Doble racionalización:

$$(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3) = x-9,$$
$$(4-\sqrt{2x-2})(4+\sqrt{2x-2}) = 18-2x = -2(x-9).$$

2. Se cancela $x-9$:

$$\frac{\sqrt{x}-3}{4-\sqrt{2x-2}} = -\frac{4+\sqrt{2x-2}}{2(\sqrt{x}+3)} \to -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}.$$

3. b) Forma $\frac{0}{0}$:

$$\frac{4\tan 2x}{3\operatorname{sen} 3x} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\tan 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\operatorname{sen} 3x}\cdot\frac{2x}{3x} \to \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{9}.$$

4. c) Forma $\frac{\infty}{\infty}$. Se divide entre x^2:

$$\frac{6+\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}}{1+\frac{4}{x}-\frac{9}{x^2}} \to 6.$$

5. Resultado: a) $-\frac{2}{3}$; b) $\frac{8}{9}$; c) 6.

Ejercicio 1B.6.5 ← volver

1. a) Forma $\frac{0}{0}$. Con $x = t^2$ ($\sqrt{x} = t$, $t \to 1$):

$$\frac{t^4-t}{t-1} = \frac{t(t-1)(t^2+t+1)}{t-1} = t(t^2+t+1) \to 3.$$

2. b) Forma $\frac{0}{0}$:

$$\frac{\tan 2x}{\operatorname{sen} 3x} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\tan 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\operatorname{sen} 3x} \to \frac{2}{3}.$$

3. Resultado: a) 3; b) $\frac{2}{3}$.

Ejercicio 1B.6.6 ← volver

1. Dominio: $x^2 - x = x(x-1) \neq 0$, así que $D_g = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Simplificación:

$$g(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x-1)} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \quad (x \neq 0,\ x \neq 1).$$

Apéndice A · Formulario

↑ Volver al índice

Las fórmulas de todas las partes, en el orden del cuaderno. El examen no permite formulario: este apéndice es para escribirlo de memoria y comprobar.

A.1 Parte 1A · Funciones

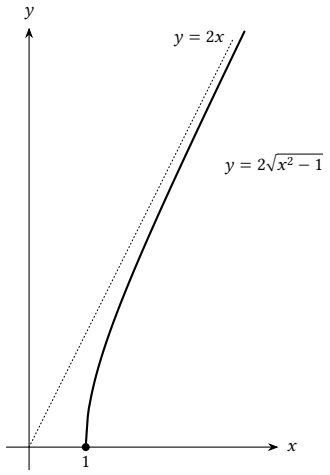
- Dominio: $\sqrt{u} \Rightarrow u \geq 0$; $\frac{1}{u} \Rightarrow u \neq 0$; $\ln u \Rightarrow u > 0$; $\operatorname{ang\,sen} u$, $\operatorname{ang\,cos} u \Rightarrow |u| \leq 1$.
- $D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \cdot D_{fg} = D_f \cap D_g \cdot$ en $\frac{f}{g}$, además $g(x) \neq 0$.
- Inversa: $D_{f^{-1}} = R_f$, $R_{f^{-1}} = D_f$; $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$; gráfica simétrica respecto a $y = x$.
- Inyectiva: estrictamente creciente o decreciente; recta horizontal corta una vez.
- $y = k \pm c\sqrt{a^2-(x-h)^2}$: circunferencia ($c = 1$) o elipse de centro (h,k); $y = k \pm c\sqrt{(x-h)^2-a^2}$ o $\sqrt{(x-h)^2+a^2}$: hipérbola.
- $y = f(x-h)+k$: traslación (h,k) · $-f(x)$: reflejo en el eje x · $f(-x)$: en el eje y.
- Paramétricas: $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \cdot \sec^2 t - \tan^2 t = 1 \cdot \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$.
- $\operatorname{ang\,sen}: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ · $\operatorname{ang\,cos}: [-1,1] \to [0,\pi]$ · $\operatorname{ang\,tan}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- $e^{\ln x} = x$ $(x > 0)$, $\ln e^x = x \cdot \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \cdot a^x = e^{x \ln a}$.
- $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ · $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ · $\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ · $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

A.2 Parte 1B · Límites y continuidad

- $\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$.
- Indeterminadas: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$. $\frac{k}{0}$ $(k \neq 0)$: límite infinito o no existe.
- $x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2)$ · $(\sqrt{A}-B)(\sqrt{A}+B) = A - B^2$.
- Raíces $\sqrt[p]{x}$, $\sqrt[q]{x}$: $x = t^m$, $m = \operatorname{mcm}(p,q)$, $t \to \sqrt[m]{a}$.
- Con $u \to 0$: $\frac{\operatorname{sen} u}{u} \to 1$ · $\frac{\tan u}{u} \to 1$ · $\frac{1-\cos u}{u^2} \to \frac{1}{2}$ · $\frac{1-\cos u}{u} \to 0$.
- $\frac{\operatorname{sen} ku}{u} \to k \cdot \frac{\operatorname{sen} au}{\operatorname{sen} bu} \to \frac{a}{b} \cdot \frac{\tan au}{\operatorname{sen} bu} \to \frac{a}{b}$.
- Al infinito: $\frac{k}{x^n} \to 0$; dividir entre la mayor potencia del denominador; $\sqrt{x^2} = |x|$.
- Cociente de polinomios al infinito: grado menor arriba $\to 0$; grados iguales $\to$ cociente de coeficientes principales.
- Asíntota vertical $x = a$: un lateral es $\pm\infty$. Horizontal $y = L$: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$.
- Continuidad en c: $f(c)$ definida · $\lim_{x\to c} f(x)$ existe · $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.
- $e^{-x} \to 0$ si $x \to \infty$ · $\tanh x \to \pm 1$ si $x \to \pm\infty$ · $\operatorname{senh} 0 = 0$, $\cosh 0 = 1$.

A.3 Parte 2A · La derivada

- $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ · derivable $\Rightarrow$ continua.
- $(uv)' = uv' + vu' \cdot \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu'-uv'}{v^2} \cdot (u^n)' = nu^{n-1}u' \cdot \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- $(\operatorname{sen} u)' = \cos u\, u' \cdot (\cos u)' = -\operatorname{sen} u\, u' \cdot (\tan u)' = \sec^2 u\, u' \cdot (\sec u)' = \sec u \tan u\, u'$.
- $(\cot u)' = -\csc^2 u\, u' \cdot (\csc u)' = -\csc u \cot u\, u'$.



Ejercicio 1A.6.6 ← volver

1. El rectángulo más grande que se corta del tronco está inscrito en el círculo: su diagonal es el diámetro D.
2. Si h es el alto, por Pitágoras $x^2 + h^2 = D^2$, así que $h = \sqrt{D^2 - x^2}$.
3. Área: $A = xh = x\sqrt{D^2 - x^2}$.
4. Dominio: $x > 0$ y $h > 0$, es decir, $0 < x < D$.

Ejercicio 1A.10.1 · Una función dada en forma implícita ← volver

1. Despeje: $9y^2 = 36 - 4x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{9}\left(9 - x^2\right) \Rightarrow y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$. La condición $y \le 0$ elige el signo negativo.
2. **Dominio:** $9 - x^2 \ge 0 \iff -3 \le x \le 3$.
3. **Recorrido:** la raíz va de 0 (en $x = \pm 3$) a 3 (en $x = 0$), así que y va de -2 a 0: $[-2, 0]$. Es la mitad inferior de la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Ejercicio 1A.10.2 · Volumen de una caja como modelo ← volver

1. La base es un cuadrado de lado $30 - 2x$ y la altura es x: $V = x(30 - 2x)^2$.
2. Dominio: $x > 0$ y $30 - 2x > 0$, es decir, $0 < x < 15$.
3. $V(5) = 5 \cdot 20^2 = 2000\ \text{cm}^3$. (El volumen máximo se obtiene en la Parte 2C: justamente $x = 5$.)

Ejercicio 1A.10.3 · Logaritmo de una cuadrática ← volver

1. **Dominio:** el argumento del logaritmo debe ser positivo: $4 - x^2 > 0 \iff -2 < x < 2$.
2. **Recorrido:** $4 - x^2$ toma todos los valores de $(0, 4]$ (el máximo, 4, en $x = 0$). Como ln es creciente, f toma todos los valores de $(-\infty, \ln 4]$: cerca de $x = \pm 2$ el argumento tiende a 0^+ y ln tiende a $-\infty$.

A.6 Parte 3A · Integrales definida e indefinida

- Riemann: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i\,\Delta x$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$

- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$; $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.
- Valor medio: $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. TVM: existe $c \in [a, b]$ con $f(c) = \bar{f}$.
- TFC: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, con $F' = f$.
- Límites variables:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x).$$

- $\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C$; $\int \tan u\,\mathrm{d}u = -\ln|\cos u| + C$; $\int \cot u\,\mathrm{d}u = \ln|\operatorname{sen} u| + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,tan}\frac{u}{a} + C$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{ang\,sen}\frac{u}{a} + C$.

A.7 Parte 3B · Aplicaciones de la integral

- Área en x: $A = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x$, con f arriba.
- Área en y: $A = \int_c^d \left[x_{\text{der}} - x_{\text{izq}}\right]\mathrm{d}y$.
- Arco, cartesianas: $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$.
- Arco, paramétricas: $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$.
- Arco, polares: $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\,\mathrm{d}\theta$.
- Discos y arandelas: $V = \pi\int_a^b \left(R^2 - r^2\right)\mathrm{d}x$ (o $\mathrm{d}y$).
- Capas: $V = 2\pi\int_a^b \rho\, h\,\mathrm{d}x$, con ρ la distancia al eje.
- Identidades útiles: $\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$, $\operatorname{sen}^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2}$, $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.
- Trabajo: $W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ · resorte $F = kx$, $W = \frac{k}{2}\left(b^2 - a^2\right)$ · bombeo: peso de la capa $\rho g\, A(y)\,\mathrm{d}y$ por la distancia que sube.

A.8 Parte 3C · Integral impropia

- $\int_a^\infty f = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f$ · integrando no acotado en a: $\int_a^b f = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f$ · punto malo interior: partir y que las dos partes converjan.
- $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ converge si $p > 1$; $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$, si $p < 1$.

A.9 Parte 4A · Métodos de integración

- Partes: $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$; elección de u con LIATE (logaritmo, inversa, algebraica, trigonométrica, exponencial).
- $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$; $\int \operatorname{ang\,tan} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{ang\,tan} x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$.
- $\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|$; $\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x|$; $\int \csc x\,\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x|$.

Apéndice E · Resoluciones de los ejercicios propuestos

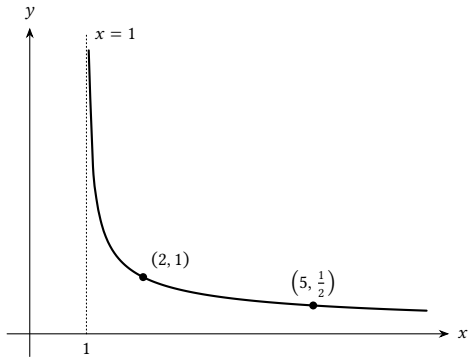
↑ Volver al índice

E.1A · Unidad 1 · Parte A · Funciones: dominio, recorrido, inversa, representaciones, trascendentes y modelos

Ejercicio 1A.6.1

← volver

1. **Dominio:** la raíz está en el denominador: $x - 1 > 0$, es decir, $D_f = (1, \infty)$.
2. **Recorrido:** $\sqrt{x-1}$ toma todos los valores positivos, y su recíproco también: cuando $x \to 1^+$, $f(x) \to \infty$; cuando $x \to \infty$, $f(x) \to 0^+$. Como f es continua y decreciente, $R_f = (0, \infty)$.
3. **Gráfica:** la de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ trasladada una unidad a la derecha; asíntota vertical $x = 1$ y horizontal $y = 0$. Pasa por $(2, 1)$ y $\left(5, \frac{1}{2}\right)$.



Ejercicio 1A.6.2

← volver

1. $f \circ g$: $f(x^2+1) = \sqrt{x^2+1}$. Como $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ para todo x, $g(x) \in D_f$ siempre: dominio $\mathbb{R}$.
2. Recorrido de $f \circ g$: $x^2 + 1$ toma todos los valores de $[1, \infty)$, y su raíz, los de $[1, \infty)$. El mínimo es 1, en $x = 0$.
3. $f \cdot g$: $\sqrt{x}\,(x^2+1)$, con dominio $D_f \cap D_g = [0, \infty) \cap \mathbb{R} = [0, \infty)$.
4. Recorrido de $f \cdot g$: es producto de dos funciones no negativas y crecientes en $[0, \infty)$, así que es creciente; vale 0 en $x = 0$ y crece sin límite: $[0, \infty)$.

Ejercicio 1A.6.3

← volver

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ (denominador $\neq 0$).
2. **Despeje:** $y(3x+2) = x - 1 \Rightarrow 3xy - x = -1 - 2y \Rightarrow x(3y-1) = -(2y+1)$, y si $y \neq \frac{1}{3}$,

$$x = \frac{2y+1}{1-3y}.$$

Apéndice B · Exámenes

↑ Volver al índice

B.1 Cómo serán los exámenes

Todavía no hay exámenes publicados del Plan 2026. El programa pide un examen final como evaluación sumativa y no dice cómo es; los finales y extraordinarios de los planes 2010 y 2016 de las materias que se juntaron en esta (Cálculo Diferencial, Cálculo y Geometría Analítica y Cálculo Integral) traían seis problemas en dos horas, uno por tema y en un orden fijo, sin calculadora ni formulario. Los simulacros de este apéndice siguen esa forma con los cuatro temas del programa 2026: siete problemas, uno por cada bloque de temas, todos tomados de exámenes de los planes anteriores en temas que no cambiaron.

B.2 Simulacros

Cada simulacro reúne ejercicios propuestos en el orden del programa. Resuélvelo en **2 horas y media**, sin calculadora, sin formulario y sin ver el cuaderno; después califícalo con las resoluciones del Apéndice E. El problema 6 son tres integrales, una por método, que valen lo mismo.

Simulacro I

Problema	Tema	Ejercicio	Examen de origen
1	Inversa de una función en paramétricas	1A.6.4	Cálculo Diferencial, 2º final 2001-2, tipo A, problema 1
2	Tres límites	1B.6.4	Cálculo Diferencial, 1er final 2006-1, tipo B, problema 2
3	Razón de cambio	2A.6.3	Cálculo y Geometría Analítica, 1er final 2020-1, tipo A, problema 3
4	Optimación	2C.6.2	Cálculo Diferencial, 2º final 2001-2, tipo A, problema 5
5	Área entre curvas	3B.6.1	Cálculo Integral, 2º final 2016-2, problema 4
6	Tres integrales	4A.6.1, 4A.6.3, 4A.6.6	Cálculo Integral, 2º extraordinario 2010-1, tipo A, problema 3, inciso a); 2º final 2015-2, tipo B, problema 3, inciso a); 2º extraordinario 2019-1, problema 3, inciso c)
7	Intervalo de convergencia	4B.6.1	Cálculo Integral, 2º final 2017-2, problema 1

Simulacro II

Apéndice D · Fuentes

↑ Volver al índice

Programa de la asignatura

- Programa de estudios de *Cálculo Diferencial e Integral* del Plan 2026 de Ingeniería en Computación (primer semestre, 10 créditos, 96 horas: 64 de teoría y 32 de práctica; obligatoria, sin seriación antecedente). Cuatro temas: funciones y límites; derivada y sus aplicaciones; integral definida e integral indefinida; métodos de integración.

De él se tomaron el orden de las unidades y de sus partes, el objetivo del curso, el objetivo de cada tema y el contenido literal de cada parte.

Exámenes

Todavía no hay exámenes del Plan 2026. Los ejercicios de examen salen de los exámenes de los planes 2010 y 2016 de las materias que se juntaron en esta, en los temas que no cambiaron; son los mismos que usan *Curso de Emergencia, Cálculo Diferencial* y *Curso de Emergencia, Cálculo Integral*, que los listan completos en su Apéndice D. En cada ejercicio se cita el examen del que se adaptó con la forma «1er final 2011-2, tipo A, problema 3»; los de Cálculo y Geometría Analítica llevan el nombre de la materia.

- **Temas 1 y 2 (Partes 1A, 1B, 2A y 2C):** 10 exámenes finales de *Cálculo Diferencial* (Plan 2010 y la versión anterior de la misma materia, de 2001-2 a 2013-2) y 39 exámenes finales y 17 parciales de *Cálculo y Geometría Analítica* (Plan 2016, de 2016-1 a 2026-2).
- **Partes 2B, 3A, 3B, 3C, 4A y 4B:** 112 exámenes finales y extraordinarios de *Cálculo Integral*: 52 del Plan 2010 (de 2010-1 a 2016-2) y 60 del Plan 2016 (de 2016-2 a 2026-1), más los parciales del Plan 2016 para las series.

Los enunciados están redactados de nuevo, las figuras están redibujadas y las resoluciones son propias; las resoluciones publicadas solo se usaron para cotejar (Apéndice C). Los ejercicios de las secciones «Lo que agrega el Plan 2026» son propios y no llevan cita de examen.

Bibliografía del programa

Básica

- García, P., Castañeda, J. E. y Jurado, M. *Cálculo diferencial e integral con geometría analítica para ingeniería*, 1.ª ed., 2017.
- Larson, R. y Edwards, B. *Cálculo diferencial e integral*, 1.ª ed. Cengage, 2023.
- Smith, R. T., Minton, R. B. y Rafhi, Z. A. *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas*, 1.ª ed. McGraw-Hill, 2019.
- Stewart, J., Clegg, D. y Watson, S. *Cálculo: trascendentes tempranas*, 1.ª ed. Cengage Learning, 2021.
- Zill, D. y Wright, W. *Cálculo. Trascendentes tempranas*, 4.ª ed. McGraw-Hill Interamericana, 2023.

Los temas que el programa 2026 agrega (representación implícita, funciones como modelos,

Apéndice C · Fe de erratas

↑ Volver al índice

Todas las resoluciones de este cuaderno son propias. Varios exámenes de Cálculo Integral de los planes anteriores traen una resolución publicada; para cada problema usado aquí que la tiene, se comparó con la resolución propia, verificada con álgebra computacional. Aquí se registran las diferencias: resultados distintos, pasos que cambian el resultado y enunciados con datos que sobran, faltan o admiten dos lecturas. No se registran las formas equivalentes de un mismo resultado (otra constante de integración, otra forma algebraica). Los ejercicios propios del Plan 2026 no tienen resolución publicada.

C.1A · Unidad 1 · Parte A · Funciones: dominio, recorrido, inversa, representaciones, trascendentes y modelos

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.1B · Unidad 1 · Parte B · Límites y continuidad: formas indeterminadas, límites al infinito y funciones por partes

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.2A · Unidad 2 · Parte A · La derivada: reglas, implícita y paramétrica, tangentes y razón de cambio

2º final 2013-2, tipo A, problema 4: El enunciado pide la razón «en el instante en el cual el esquiador se encuentra a una distancia de 3 m del punto más bajo de la rampa». Como la rampa es recta y la rapidez es constante, $\frac{dx}{dt} = \frac{4}{5}\frac{dp}{dt}$ no depende del instante y ese dato sobra; en este cuaderno se omite.

2º final 2013-1, tipo A, problema 4: El enunciado pide «una ecuación de la recta tangente» en el punto de ordenada $\frac{3}{4}$, pero la curva ($y = 1 - x^2$) tiene dos puntos con esa ordenada, $\left(\pm\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, con tangentes distintas. En este cuaderno se fija el de abscisa positiva y se da también la otra tangente.

2º final 2006-2, tipo A, problema 4: El enunciado habla de «el punto P», pero hay dos tangentes a $y = x^2$ que forman 45° con la recta $3x - y + 1 = 0$: en $(-1, 1)$ y en $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$. En este cuaderno se dan los dos.

1er final 2005-2, tipo B, problema 2: El enunciado pide $\frac{dy}{dx}$ en $y = 1$, donde $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ se anulan a la vez y la fórmula paramétrica da $\frac{0}{0}$. En este cuaderno se simplifica el cociente antes de evaluar o se elimina el parámetro ($x = 1 - y^2$); las dos vías dan $-\frac{1}{2}$.

C.2B · Unidad 2 · Parte B · Regla de L'Hôpital: las siete formas indeterminadas

2º final 2010-2, tipo A, problema 2: En la resolución publicada, al aplicar la regla de L'Hôpital a $\ln\cosh x / \operatorname{senh} x$ se escribe la derivada del denominador como $\operatorname{senh} x$ (es

- $\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ y $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$, en $(-1, 1]$.

4B.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Si la serie no tiene x: término n-ésimo primero; después geométrica, serie p, cociente o Leibniz, según su forma.
2. Si tiene x: cociente con valor absoluto, despeja $|x-a| < R$ y sustituye cada extremo en la serie original.
3. Si piden Maclaurin o Taylor: busca primero una serie conocida con sustitución; si no la hay, haz la tabla de cuatro o cinco derivadas y busca el patrón.
4. Escribe el resultado completo: carácter con el criterio usado, suma exacta, intervalo con corchetes o paréntesis, término general con su índice.

4B.10 Lo que agrega el Plan 2026: el criterio de la integral y las series en la computadora

4B.10.1 Criterio de la integral

Si f es continua, positiva y decreciente en $[1, \infty)$ y $a_n = f(n)$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{y} \quad \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

tienen el mismo carácter: las dos convergen o las dos divergen. La razón es geométrica: los términos $a_2, a_3, \ldots$ son áreas de rectángulos de base 1 que caben bajo la gráfica de f desde $x = 1$, y $a_1, a_2, \ldots$ son rectángulos que la cubren. Si la serie empieza en otro índice, la integral empieza en ese número; basta que f sea decreciente a partir de algún punto.

Cuidado: el criterio dice si la serie converge, pero *no* da su suma. La integral y la serie valen números distintos.

La serie p. Con $f(x) = \frac{1}{x^p}$ ($p > 0$), el criterio y la integral impropia de la Parte 3C (sección 3C.1.1) dan la regla de la tabla de series conocidas: $\sum \frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p > 1$.

Cuándo usarlo. Cuando el término general es una función de n fácil de integrar y los criterios del cociente y de comparación no deciden. Pasa sobre todo con logaritmos, como $\frac{1}{n \ln n}$ o $\frac{\ln n}{n^2}$: ahí el cociente da $L = 1$, igual que en todas las series p, y no decide. También sirve cuando la integral sale con un cambio de variable inmediato, como en ne^{-n^2}.

> **Ejemplo resuelto · Criterio de la integral**
>
> Determine el carácter de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ con el criterio de la integral.
>
> **Resolución.**
>
> 1. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ es continua y positiva, y es decreciente en $[1, \infty)$ porque el denominador crece.
> 2. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \lim_{b\to\infty} \operatorname{ang\,tan} x\Big|_1^b = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$: converge.

1. Punto: $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2$; $P\left(2, \frac{1}{2}\right)$.
2. Pendiente: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $m = -\frac{1}{4}$.
3. Tangente: $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{x}{4} + 1$, o $x + 4y - 4 = 0$.
4. Intersecciones: con el eje x ($y = 0$), $x = 4$; con el eje y ($x = 0$), $y = 1$.
5. Área: $\frac{1}{2}(4)(1) = 2$.

Ejercicio 2A.6.6 ← volver

1. $A = \pi r^2$, así que $dA = 2\pi r\, dr$.
2. Con $r = 20$ y $dr = 0.02$: $dA = 2\pi(20)(0.02) = 0.8\pi$ cm^2.
3. Exacto: $\Delta A = \pi\left(20.02^2 - 20^2\right) = \pi(0.8004)$ cm^2.
4. La diferencia, $0.0004\pi = \pi(dr)^2$, es despreciable frente a dA.

Se cambió la pregunta del original, que pide la rapidez con que aumenta el área si el radio crece a razón de 0.02 cm/s: $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} = 0.8\pi$ cm^2/s, el mismo número.

Ejercicio 2A.6.7 ← volver

1. $y = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} 2t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$ (único en el intervalo). Punto $(0, 1)$.
2. $\frac{dy}{dt} = 2\cos 2t$ y $\frac{dx}{dt} = 2\cos 2t\,(-\operatorname{sen} 2t)(2) = -4 \operatorname{sen} 2t \cos 2t$. En $t = \frac{\pi}{4}$ las dos valen 0: la fórmula da $\frac{0}{0}$.
3. Se simplifica antes de evaluar (para $\cos 2t \neq 0$):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos 2t}{-4 \operatorname{sen} 2t \cos 2t} = -\frac{1}{2 \operatorname{sen} 2t}.$$

   Cuando $t \to \frac{\pi}{4}$, el cociente tiende a $-\frac{1}{2}$.
4. Otra forma, sin el parámetro: $x = \cos^2 2t = 1 - \operatorname{sen}^2 2t = 1 - y^2$. Entonces $\frac{dx}{dy} = -2y$ y $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y} = -\frac{1}{2}$ en $y = 1$.

Ejercicio 2A.10.1 · Velocidad y aceleración de un móvil ← volver

1. $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$ y $a(t) = v'(t) = 6t - 12$.
2. Reposo: $3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3) = 0 \Rightarrow t = 1$ y $t = 3$ s. Entre ellos, $v < 0$: la partícula regresa.
3. $a(t) = 0 \Rightarrow t = 2$ s; $v(2) = 12 - 24 + 9 = -3$ m/s, la velocidad más negativa del recorrido.

Ejercicio 2A.10.2 · Una raíz cúbica con la diferencial ← volver

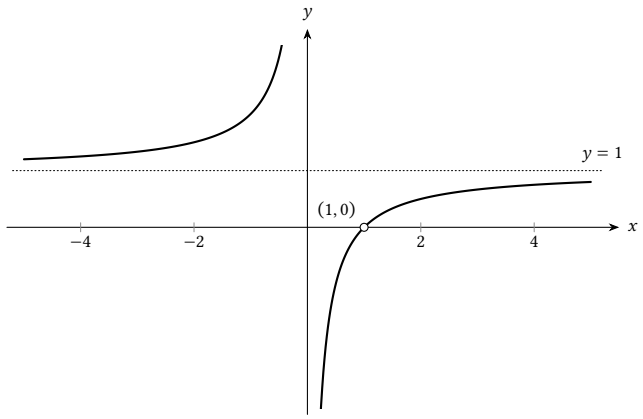
1. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 8$, $\mathrm{d}x = 0.12$; $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$, así que $f'(8) = \frac{1}{12}$.
2. $\mathrm{d}y = f'(8)\,\mathrm{d}x = \frac{0.12}{12} = 0.01$.
3. $\sqrt[3]{8.12} \approx f(8) + \mathrm{d}y = 2 + 0.01 = 2.01$.

E.2B · Unidad 2 · Parte B · Regla de L'Hôpital: las siete formas indeterminadas

Ejercicio 2B.6.1 ← volver

```
for N in (10, 100, 1000):
    S = sum(Rational(1, k**2) for k in range(1, N + 1))
    print(N, round(float(S), 3))      # 1.55, 1.635, 1.644
suma = summation(1/n**2, (n, 1, oo))
print(suma)                                    # pi**2/6
x = symbols("x")
print(series(log(1 + x), x, 0, 5))   # x - x**2/2 + ...
assert suma == pi**2/6
```


2. a) Asíntota vertical: en $x = 0$ el numerador simplificado vale -1; $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^-} g(x) = +\infty$. La recta $x = 0$ es asíntota vertical. En $x = 1$ el factor se canceló: no hay asíntota, hay un hueco.
3. Asíntota horizontal: $\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$; la recta $y = 1$.
4. b) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x} = \frac{0}{1} = 0$. La discontinuidad en $x = 1$ es evitable.
5. c) La gráfica es la hipérbola $y = 1 - \frac{1}{x}$ sin el punto $(1, 0)$.



Ejercicio 1B.10.1 · Una constante para la continuidad en un intervalo ← volver

1. Para $x \neq 2$, $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$: continua en $[0, 2)$ y en $(2, 3]$.
2. En $x = 2$: $\lim_{x\to 2}(x + 2) = 4$. La función es continua ahí si $f(2) = k = 4$ (la discontinuidad es evitable).
3. $k = 4$.

Ejercicio 1B.10.2 · Diferencia de una raíz y una recta al infinito ← volver

1. Forma $\infty - \infty$. Se multiplica y divide por el conjugado:
$$\sqrt{x^2 + 3x} - x = \frac{x^2 + 3x - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}.$$
2. Se divide entre x (con $x > 0$, $\sqrt{x^2} = x$): $\dfrac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + 1} \to \dfrac{3}{1 + 1}$.
3. **El límite vale $\frac{3}{2}$.**

Ejercicio 1B.10.3 · La asíntota de un modelo ← volver

1. $2^{-t/10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{t/10} \to 0$ cuando $t \to \infty$, porque la base está entre 0 y 1.
2. $\lim_{t\to\infty} T(t) = 20 + 70 \cdot 0 = 20$.
3. **La recta $T = 20$ es asíntota horizontal:** la temperatura se acerca a la del cuarto, 20 °C, pero $T(t) > 20$ para todo t.

- $(\operatorname{ang\,sen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ · $(\operatorname{ang\,tan} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$ · $(\operatorname{ang\,sec} u)' = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$; las «co» llevan signo menos.
- Inversa: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$.
- Paramétrica: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$ · $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx/dt}$.
- Tangente $y - y_0 = m(x - x_0)$ · normal con $-\frac{1}{m}$ · $Ax + By + C = 0$ tiene $m = -\frac{A}{B}$.
- $\tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$ · $m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \varphi = 90°$.
- Razón de cambio: figura, datos con signo, ecuación, derivar respecto a t, sustituir al final.
- Esfera $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $A = 4\pi r^2$ · cilindro $V = \pi r^2 h$ · cono $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ · círculo $A = \pi r^2$.
- Diferencial: $dy = f'(x)\,dx$ · $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ · $(e^u)' = e^u u'$ · $(a^u)' = a^u \ln a\, u'$ · $(\operatorname{senh} u)' = \cosh u\, u'$ · $(\cosh u)' = \operatorname{senh} u\, u'$ · $(\tanh u)' = \operatorname{sech}^2 u\, u'$.
- $y = f^g$: $\ln y = g \ln f$, $y' = f^g\left(g' \ln f + g\frac{f'}{f}\right)$.

A.4 Parte 2B · Regla de L'Hôpital

- L'Hôpital ($\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$): $\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}$, derivando por separado.
- $0 \cdot \infty$: $fg = \frac{f}{1/g}$ · $\infty - \infty$: común denominador.
- $y = f^{\,g}$: $\lim y = e^{\lim g \ln f}$ · $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$ · $\lim_{x\to 0}(1 + x)^{1/x} = e$.

A.5 Parte 2C · Variación y optimización

- Crítico: c en el dominio con $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ inexistente.
- Rolle: f continua en $[a, b]$, derivable en (a, b), $f(a) = f(b) \Rightarrow f'(c) = 0$ para algún $c \in (a, b)$.
- Valor medio: f continua en $[a, b]$, derivable en $(a, b) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ para algún $c \in (a, b)$.
- Weierstrass: continua en $[a, b] \Rightarrow$ alcanza máximo y mínimo absolutos. Bolzano: continua y $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow f(c) = 0$ para algún $c \in (a, b)$.
- $f' > 0$: crece · $f' < 0$: decrece · $f'' > 0$: cóncava $\cup$ · $f'' < 0$: cóncava $\cap$.
- Primera derivada: $+ \to -$ máximo, $- \to +$ mínimo. Segunda derivada: $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$ máximo, $f''(c) > 0$ mínimo.
- Inflexión: f'' cambia de signo en c del dominio; punto $(c, f(c))$.
- Absolutos en $[a, b]$: comparar f en los críticos y en a, b.
- Áreas y volúmenes: triángulo equilátero $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$ · sector $\frac{rl}{2} = \frac{r^2\theta}{2}, l = r\theta$ · cilindro $V = \pi r^2 h$, lateral $2\pi r h$ · cono $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.
- Optimación: objetivo, restricción, una variable, dominio, crítico, justificación, respuesta con unidades.

Ejercicio 1A.10.4 · Inversa de un coseno hiperbólico ← volver

1. $\cosh x$ es creciente en $[0, \infty)$ con $\cosh 0 = 1$: f es inyectiva y $R_f = [2, \infty)$.
2. Despeje con $u = e^x$: $y = u + \frac{1}{u} \Rightarrow u^2 - yu + 1 = 0 \Rightarrow u = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$. Como $x \geq 0$, $u = e^x \geq 1$ y se toma el signo $+$.
3. $x = \ln \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$; al intercambiar, $f^{-1}(x) = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} = \operatorname{ang\,cosh} \frac{x}{2}$, con $D_{f^{-1}} = [2, \infty)$ y $R_{f^{-1}} = [0, \infty)$.

E.1B · Unidad 1 · Parte B · Límites y continuidad: formas indeterminadas, límites al infinito y funciones por partes

Ejercicio 1B.6.1 ← volver

1. Las dos reglas son polinomios; el único punto en duda es $x = a$, con $a \geq -2$.
2. Condición 1: $f(a) = a^2 + 4$ (primera regla); se cumple.
3. Condición 2: $\lim_{x\to a^-} f(x) = a^2 + 4$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = (a - 2)^2$. Se igualan: $a^2 + 4 = a^2 - 4a + 4$, de donde $4a = 0$ y $a = 0$.
4. Condición 3: con $a = 0$, el límite vale $4 = f(0)$; se cumple. Además $a = 0 \geq -2$.
5. Resultado: $a = 0$.

En el original la segunda regla se lee $(x - 2)^2$.

Ejercicio 1B.6.2 ← volver

1. a) Forma $\frac{\infty}{\infty}$. En senos y cosenos:

$$\frac{\csc 4x}{\cot 3x} = \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 4x \cos 3x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x} \cdot \frac{4x}{\operatorname{sen} 4x} \cdot \frac{1}{\cos 3x} \to \frac{3}{4}.$$

   El lateral por la derecha coincide con el límite bilateral.
2. b) Forma $\frac{0}{0}$. Con $x = t^3$, $t \to 2$ y $2x - 16 = 2(t^3 - 8)$.
3. Diferencia de cubos:

$$\frac{t - 2}{2(t - 2)(t^2 + 2t + 4)} = \frac{1}{2(t^2 + 2t + 4)} \to \frac{1}{2 \cdot 12} = \frac{1}{24}.$$

4. Resultado: a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{24}$.

Ejercicio 1B.6.3 ← volver

1. a) Forma $\frac{0}{0}$. Doble racionalización:

$$(1 - \sqrt{5 - x})(1 + \sqrt{5 - x}) = 1 - (5 - x) = x - 4,$$
$$(3 - \sqrt{5 + x})(3 + \sqrt{5 + x}) = 9 - (5 + x) = -(x - 4).$$

2. Se cancela $x - 4$:

$$\frac{1 - \sqrt{5 - x}}{3 - \sqrt{5 + x}} = -\frac{3 + \sqrt{5 + x}}{1 + \sqrt{5 - x}} \to -\frac{3 + 3}{1 + 1} = -3.$$

- $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$; $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$; $1+\tan^2 x = \sec^2 x$; $1+\cot^2 x = \csc^2 x$.
- $\int \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$; $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$.
- $\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\big)$.
- Sustitución trigonométrica: $\sqrt{a^2-x^2} \to x = a\operatorname{sen}\theta$; $\sqrt{a^2+x^2} \to x = a\tan\theta$; $\sqrt{x^2-a^2} \to x = a\sec\theta$.
- $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,tan}\frac{u}{a}$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{ang\,sen}\frac{u}{a}$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,sec}\frac{u}{a}$.
- $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2\pm a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|$.
- Fracciones parciales: $\frac{A}{x-r}$ por factor lineal; $\frac{A_1}{x-r}+\cdots+\frac{A_k}{(x-r)^k}$ por factor repetido; $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ por cuadrático irreducible.
- $\int \frac{A\,\mathrm{d}x}{(x-r)^2} = -\frac{A}{x-r}$; $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+q} = \frac{1}{2}\ln(x^2+q)$.

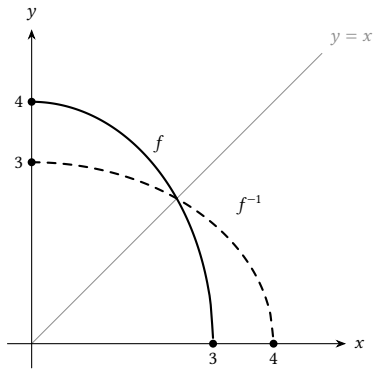
A.10 Parte 4B · Sucesiones y series

- Término n-ésimo: $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.
- Geométrica: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ si $|r|<1$; diverge si $|r|\geq 1$.
- Serie p: $\sum \frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p>1$.
- Cociente: $L = \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$; $L<1$ converge, $L>1$ diverge, $L=1$ no decide.
- Comparación en el límite: $\lim \frac{a_n}{b_n} = c \in (0,\infty) \Rightarrow$ mismo carácter.
- Integral: f continua, positiva y decreciente, $a_n = f(n) \Rightarrow \sum a_n$ y $\int_1^{\infty} f$ tienen el mismo carácter.
- Leibniz: $\sum(-1)^{n+1}b_n$ converge si b_n decrece y $b_n \to 0$.
- Taylor: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$; Maclaurin con $a=0$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, en $(-1,1)$.
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ y $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$, en $(-1,1]$.

3. Con $y = \frac{1}{3}$ la ecuación queda $0 = -\frac{5}{3}$: no hay x. Entonces $R_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$, y para cada otro y hay un único x: f es inyectiva.
4. **Intercambio:** $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{1-3x}$, con $D_{f^{-1}} = R_f = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{3}\right\}$ y $R_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}$.
5. Comprobación: $f(0) = -\frac{1}{2}$ y $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{0}{5/2} = 0$.

Ejercicio 1A.6.4 ← volver

1. **Forma cartesiana:** $\cos t = \frac{x}{3}$, $\operatorname{sen} t = \frac{y}{4}$ y $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. Con $x \geq 0$, $y \geq 0$ es el cuarto de elipse del primer cuadrante: $y = \frac{4}{3}\sqrt{9-x^2}$, $x \in [0,3]$, con recorrido $[0,4]$.
2. **Inyectividad:** en $[0,3]$, $9-x^2$ decrece, así que f es decreciente: tiene inversa.
3. **Despeje:** $x^2 = 9 - \frac{9y^2}{16} = \frac{9}{16}\left(16-y^2\right)$ y, como $x \geq 0$, $x = \frac{3}{4}\sqrt{16-y^2}$.
4. **Inversa:** $f^{-1}(x) = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$, con $D_{f^{-1}} = [0,4]$ y $R_{f^{-1}} = [0,3]$.
5. **Gráficas:** f va de $(0,4)$ a $(3,0)$; f^{-1}, de $(0,3)$ a $(4,0)$: el cuarto de la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.



Ejercicio 1A.6.5 ← volver

1. **Dominio:** $\cosh t$ es creciente para $t \geq 0$, con $\cosh 0 = 1$ y sin cota superior: $x \in [1,\infty)$.
2. **Recorrido:** $\operatorname{senh} t$ es creciente, $\operatorname{senh} 0 = 0$ y sin cota: $y \in [0,\infty)$.
3. **Forma cartesiana:** con $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$, $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$. Como $y \geq 0$, $y = 2\sqrt{x^2-1}$.
4. **Gráfica:** mitad superior de la rama derecha de la hipérbola $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$: empieza en el vértice $(1,0)$ y se acerca a la asíntota $y = 2x$.

Problema	Tema	Ejercicio	Examen de origen
1	Inversa de una racional	1A.6.3	Cálculo y Geometría Analítica, 1er parcial 2025-1, tipo C, problema 2
2	Asíntotas y límite	1B.6.6	Cálculo y Geometría Analítica, 2º final 2025-1, tipo A, problema 2
3	Recta tangente a una curva paramétrica	2A.6.1	Cálculo Diferencial, 2º final 2013-1, tipo A, problema 4
4	L'Hôpital, forma 1^∞	2B.6.1	Cálculo Integral, 2º final 2020-1, problema 2
5	Valor medio y teorema del valor medio	3A.6.5	Cálculo Integral, 2º extraordinario 2012-2, problema 1
6	Tres integrales	4A.6.2, 4A.6.5, 4A.6.7	Cálculo Integral, 1er extraordinario 2015-1, problema 3, inciso a); 2º extraordinario 2012-2, problema 3, inciso a); 1er final 2018-2, tipo A, problema 3, inciso c)
7	Serie de Maclaurin	4B.6.5	Cálculo Integral, 1er final 2017-2, tipo A, problema 1

Después del simulacro. Con 60 o más en los dos simulacros, estás listo para el examen. Si un problema falla, vuelve a su parte y resuelve otra vez sus ejercicios de examen. Para practicar más, cada parte tiene otros propuestos de exámenes en el mismo formato; la integral impropia, por ejemplo, está en el ejercicio 3C.6.1 (Cálculo Integral, 2º extraordinario 2010-1, tipo A, problema 2).

sumas de Riemann con software, trabajo mecánico, criterio de la integral y visualización de series) se redactaron con estos textos, que los tratan en sus capítulos de funciones, de aplicaciones de la integral y de series infinitas; los ejercicios de esas secciones son propios.

Software

- SymPy, biblioteca de Python para matemáticas simbólicas (`https://www.sympy.org`). Los recuadros «Con la computadora» la usan; su código corre tal cual y comprueba el resultado impreso. Con la biblioteca matplotlib, `sympy.plot` dibuja las gráficas.

La notación de este cuaderno (ang sen x, ang tan x y ang sec x para las trigonométricas inversas; senh x y cosh x; «ordenada media»; $[u^2]$ y $[u^3]$ para las unidades de área y volumen) es la de los enunciados de los exámenes.

$\cosh x$); con eso se obtiene $\lim \ln y = 1$ y el resultado e. El límite verificado de $\ln y$ es 0 y el valor verificado del límite es 1.

C.2C · Unidad 2 · Parte C · Variación y optimización: valor medio, análisis de la gráfica y optimación

1er final 2005-2, tipo B, problema 6: El enunciado no dice qué caras tiene el recipiente; la figura dibuja todas las aristas del prisma. En este cuaderno se toma el prisma cerrado (dos triángulos y tres rectángulos), con $L = \sqrt[3]{6 + 3\sqrt{2}}$ m; si la cara de la hipotenusa fuera abierta, resultaría $L = \sqrt[3]{6}$ m.

C.3A · Unidad 3 · Parte A · Integrales definida e indefinida: sumas de Riemann, valor medio, teorema fundamental e inmediatas

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.3B · Unidad 3 · Parte B · Aplicaciones de la integral: área, longitud de arco, volumen de revolución y trabajo

2º extraordinario 2015-1, problema 4: En la resolución publicada la curva de la derecha aparece como $x = y^2 - 2y$ en lugar de $x = 2y - y^2$, y el integrando queda $(y^2 - 2y) - (y^2 - 4y) = 2y$; el área coincide por casualidad, $9\,[u^2]$, pero el integrando verificado es $6y - 2y^2$. La ecuación de los cortes aparece como $2y^2 - 6 = 0$; la verificada es $2y^2 - 6y = 0$.

C.3C · Unidad 3 · Parte C · Integral impropia: convergencia y divergencia

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.4A · Unidad 4 · Parte A · Métodos de integración: partes, sustitución trigonométrica y fracciones parciales

1er final 2010-2, tipo A, problema 4, inciso a): En la resolución publicada se integra $e^x \operatorname{sen} x$ en lugar de $e^{2x} \operatorname{sen} x$ y aparece $-\frac{e^x}{2}(\cos x - \operatorname{sen} x) + C$; para el integrando del enunciado, el valor verificado es $\frac{1}{5}e^{2x}(2 \operatorname{sen} x - \cos x) + C$.

2º extraordinario 2019-1, problema 3, inciso b): En la resolución publicada se toma $v = x^2$ para $\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$ y aparece $x^2 \operatorname{ang\,sec} x - \sqrt{x^2 - 1} + C$, el doble del resultado; con $v = \frac{x^2}{2}$, el valor verificado es $\frac{x^2}{2} \operatorname{ang\,sec} x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 1} + C$.

1er extraordinario 2015-1, problema 3, inciso b): En la resolución publicada, con las constantes correctas $A = 1$, $B = -1$, $D = 1$, el resultado aparece como $\ln(x - 1) + \ln(x - 2) + \frac{1}{x-2} + C$; el valor verificado es $\ln|x - 1| - \ln|x - 2| - \frac{1}{x-2} + C$.

1er extraordinario 2015-1, problema 3, inciso a): En la resolución publicada el resultado aparece como $\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x \ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$; el segundo término verificado es $-\frac{1}{2}x^2 \ln x$.

C.4B · Unidad 4 · Parte B · Sucesiones y series: carácter, criterios, intervalo de convergencia, Maclaurin y Taylor

2º final 2018-1, problema 1: En la resolución publicada la derivada de orden n aparece como $f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{3}\frac{(-1)^n}{(1+x)^n}$; el signo verificado es $(-1)^{n+1}$ (por ejemplo, $f'(0) = \frac{1}{3} > 0$). La serie final publicada sí es la correcta.

1er final 2017-2, tipo A, problema 1: En la resolución publicada el resultado enmarcado es $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n + 1)x^n$, que omite el término constante $\frac{1}{2}$; el resultado verificado empieza en $n = 0$: $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n + 1)x^n$, como en el renglón anterior de la misma resolución.